Algorithmique et complexité

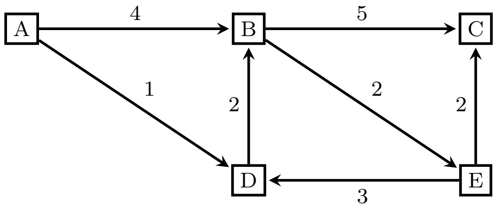
TD 2/7 – Des chemins et des arbres

Exercices complémentaires

Remarque: Les éléments de correction fournis dans le sujet ne sont pas forcément complets. Ils sont là pour vous guider dans votre travail personnel. Nous vous invitons à rédiger une solution comme vous le feriez à l'examen et, si vous avez des questions, à vous tourner vers votre chargé de TD.

Exercice 1 : Application de l'algorithme des plus courts chemins

Appliquez l'algorithme des plus courts chemins au graphe suivant à partir du noeud A.



Élements de correction :

Liste des chemins et distance pour chaque noeud d'arrivée :

- D : A→D (1)
- B : A→D→B (3)
- E : A→D→B→E (5)
- C : A→D→B→E→C (7)

Exercice 2 : Problème de transmission

Nous nous intéressons à la transmission de données dans un réseau informatique. Le réseau est représenté par un graphe orienté $G(V, E)$ où chaque routeur correspond à un sommet de V. À chaque arc $(i, j) \in E$ est associée une vitesse de transmission en MB/s qui représente la qualité de la connexion de i vers j.

Considérons u et v deux sommets quelconques de G. Soit C un chemin de u vers v. La vitesse de transmission sur ce chemin est celle de l'arc ayant la plus petite vitesse de transmission. Notre objectif est de trouver parmi tous les chemins possibles de u vers v celui ayant la vitesse de transmission maximale.

Question 1

Proposez une adaptation de l'algorithme des plus courts chemins.

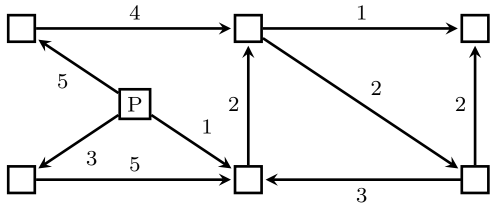
Élements de correction :

Il faut penser à modifier trois éléments dans l'algorithme des plus courts chemins :

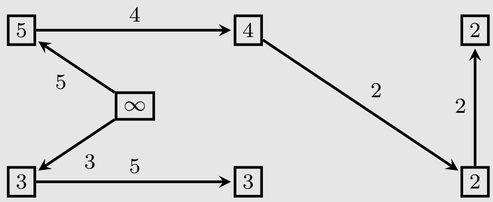
- l'extraction de l'élément de la frontière
- le calcul de la distance
- la comparaison entre distances

Question 2

Appliquez votre algorithme au graphe ci-dessous. Pour chaque sommet i, donnez le chemin optimal qui le relie à P ainsi que la vitesse de transmission.



Élements de correction :



Exercice 3 : Arbre couvrant de poids minimal – version dynamique

On considère un graphe $G = \langle V, E, w \rangle$ non orienté pondéré à poids positifs ($w : E \to \mathbb{N}^+$) et un arbre couvrant de poids minimal (MST) T de G. On note par extension $w(T) = \Sigma_{e \in T} w(e)$ le poids de T.

Supposons que le poids $w(e)$ d'une arête $e = (x, y)$ avec $e \in E \subseteq V \times V$ a changé depuis le calcul de T. On obtient un nouveau graphe $G' = \langle V, E, w' \rangle$ avec $w(e) \neq w'(e)$ et $\forall a \in E \setminus \{e\}.\ w(a) = w'(a)$.

Nous aimerions modifier T de sorte qu'il reste un arbre couvrant minimal. Bien sûr, nous pourrions recalculer T en relançant par exemple l'algorithme de Kruskal sur G. Cela coûterait $\mathcal{O}(m \times log(m))$ en temps avec $m = |E|$. Pourrions-nous faire mieux ?

Question 1

Comment mettre à jour l'arbre couvrant minimal T lorsque le poids d'une arête $e \in T$ est diminué de $w' = w(e) - w'(e) > 0$.

Élements de correction :

Il n y a rien à faire dans ce cas, T reste un MST.

Utilisez une preuve par l'absurde.

Question 2

Comment mettre à jour T lorsque le poids d'une arête $e \notin T$ est augmenté de $w' = w'(e) - w(e) > 0$.

Élements de correction :

Toujours rien à faire, T reste un MST.

Ici aussi on utilise une preuve par l'absurde.

Question 3

Comment mettre à jour T lorsque le poids d'une arête $e \notin T$ est diminué de w'. Proposez un algorithme et donner sa complexité.

Élements de correction :

Soit $C \subseteq T \cup \{e\}$ le cycle créé par l'ajout de e dans T et soit e' l'arête de C de poids $w'(e')$ maximal.

$T' = (T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ est un MST de G'.

La preuve se base sur l'optimalité de Kruskal.

L'intuition est la suivante :

- l'exécution de l'algorithme de Kruskal (qui prend les arêtes dans l'ordre de leur poids) sur G avec le nouveau poids $w'(e) < w'(e')$ est la même jusqu'à ce qu'on atteigne e,
- e est acceptée dans le nouvel arbre. Preuve par l'absurde.
- L'exécution se poursuit alors de manière identique tant qu'on n'a pas atteint e'
- e' est rejetée car elle crée un cycle
- l'ensemble des composantes connexes est à ce point identiques dans les constructions de T et T', l'exécution se termine identiquement.

La complexité de la mise à jour de MST dans ce cas est $\mathcal{O}(|V|)$ comme l'arbre couvrant a $|V| - 1$ arêtes.

Question 4

Comment mettre à jour T lorsque le poids d'une arête $e \in T$ est augmenté de w'. Proposez un algorithme et donner sa complexité.

Élements de correction :

Il faut considérer les deux sous arbres obtenus en supprimant l'arrête mise à jour. Puis il faut prendre l'arrête de poids minimal parmi celles qui traversent la coupe.

La complexité de ce cas est $\mathcal{O}(|E|)$.