CentraleSupélec

# Algorithmique et complexité

## TD 5/7 – Théorie de la complexité

Ce TD est l'occasion de s'exercer sur le cours de la complexité et de pratiquer la réduction polynomiale.

## Exercice 1 : Problème de couverture par les sommets (Vertex Cover)

Nous connaissons le problème de $k$-stable (*Independent Set*) vu en cours. Nous savons qu'il est NP-complet.

**Instance :**
- Un graphe non-orienté connexe $G = (V, E)$,
- $k \in \mathbb{N}^+$

**Question :** Existe-t-il un **stable** $S$ de $G$, c'est-à-dire un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés entre eux par une arête, tel que $|S| \geq k$ ?

En revanche, nous ne connaissons pas encore le problème de $k$-couverture par sommets (*Vertex Cover*). Sa définition est la suivante :

**Instance :**
- Un graphe non-orienté connexe $G = (V, E)$,
- $k \in \mathbb{N}^+$.

**Question :** Existe-t-il un ensemble $V' \subseteq V$ de taille $|V'| \leq k$ tel que toute arête $\{u, v\} \in E$ a au moins une de ses extrémités dans $V'$ ($u \in V' \vee v \in V'$) ?

### Question 1

Démontrez que :

$$S \text{ est un stable} \iff V' = V - S \text{ est une couverture par sommets.}$$

**Élements de correction :**

$\Rightarrow$

Supposons que $S$ est un stable et $e = (u, v)$ une arête. Au maximum une extrémité de $(u, v)$ peut être dans $S$. Donc au moins une est dans $V - S$. Donc $V - S$ est une couverture par des sommets.

$\Leftarrow$

Supposons que $V - S$ est une couverture par des sommets et $u \in S, v \in S$. Il ne peut pas y avoir d'arête $(u, v) \in E$ (sinon elle ne serait pas couverte par $V - S$. Donc $S$ est un stable.

**Question 2**

Démontrez que le problème $k$-couverture par sommets est NP-complet.

Élements de correction :

**Étape 1.** Il faut d'abord montrer que le problème est NP : on peut écrire un algorithme en Python qui vérifie qu'un sous-ensemble $V'$ est bien une solution à une instance $(G = (V, E), k)$ du problème de couverture par les sommets :

```
def verifier(V,E,k,V'):
  if len(V') > k:
    return False
  for v in V':
    if not v in V:
      return False
  for (u, v) in E:
    if (u not in V') and (v not in V'):
      return False
  return True
```

La validation de $V'$ consiste à parcourir toutes les arêtes en vérifiant si au moins une de leurs extrémités est dans $V'$. Cela se fait en $\mathcal{O}(|E| \times |V'|)$ si on utilise une liste pour $V'$ et on peut faire mieux en moyenne si on utilise un *hashSet* pour $V'$. Peu importe, du moment que la complexité est polynomiale en taille de l'instance.

**Étape 2.** Nous allons maintenant montrer que le problème de couverture par sommets est NP-difficile en utilisant une réduction polynomiale depuis le problème Stable.

Soient $\mathcal{I}_{Stable} = \langle G = (V, E), k \rangle$ une instance du problème de $k$-Stable. On construit de manière triviale une instance $\mathcal{I}_{VC} = \langle G = (V, E), k' \rangle$ du problème Vertex-Cover : le graphe ne change pas et $k' = |V| - k$. L'algorithme de construction d'une telle instance est clairement **polynomial** !

Il faut montrer que : $\mathcal{I}_{Stable}$ est une instance positive $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{I}_{VC}$ est une instance positive

$\Longrightarrow$) Supposons que $\mathcal{I}_{Stable}$ est un instance positive de Stable, elle admet une solution $S \subseteq V$ avec $|S| \geq k$. D'après la question précédente, $V' = V - S$ est une couverture et on a $|V'| = |V| - |S| \leq |V| - k = k'$. Donc $\mathcal{I}_{VC}$ est une instance positive de Vertex Cover qui admet $V'$ comme solution.

$\Longleftarrow$) Réciproquement, si $\mathcal{I}_{VC}$ est une instance positive de Vertex Cover qui admet $V'$ ($V' \subseteq V \wedge |V'| \leq k'$) comme solution. D'après la question précédente, $S = V - V'$ est un stable et on a $|S| = |V| - |V'| \geq |V| - k' = k$. Donc $\mathcal{I}_{Stable}$ est une instance positive de Stable qui admet $S$ comme solution.

**Étape 3.** En conclusion, il existe bien une réduction polynomiale de Stable (qui est NP-complet et donc NP-difficile) vers Vertex Cover, donc Vertex Cover est NP-difficile. Or comme il est NP, il est donc aussi NP-complet.

## Exercice 2 : Problème de couverture par ensembles (Set Cover)

On dit qu'un élément $e$ est couvert par un ensemble $U$ si $e$ appartient $U$. Étant donnés un ensemble fini $U$ et une famille $S = \{S_i, i \in I\} \subset \mathscr{P}(U)$, le problème consiste à couvrir tous les éléments $U$ avec une sous-famille de $S$.

Par exemple, considérons $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $S = \{\underbrace{\{0,1\}}_{S_0}, \underbrace{\{2,3\}}_{S_1}, \underbrace{\{3,4\}}_{S_2}, \underbrace{\{0,1,2\}}_{S_3}\}$. On peut couvrir $U$ avec $\{S_0, S_1, S_2\}$ mais la couverture qui utilise le moins de sous-ensembles est $\{S_2, S_3\}$.

**Question 1**

Formalisez le problème de décision correspondant.

Élements de correction :

**Données** :

- un ensemble d'éléments $U$
- une famille $S \subset \mathscr{P}(U)$ de sous-ensembles de $U$.
- $k \in \mathbb{N}^+$, un nombre naturel positif

**Question** : Existe-t-il une sous-famille $S' \subseteq S$ telle que :

- $S'$ est une couverture de $U$, c.-à-d. : $U = \cup_{S_i \in S'} S_i$
- la sous-famille $S'$ est de taille inférieure ou égale à $k$, c.-à-d. : $card(S') \leq k$.

**Question 2**

Montrer que le problème appartient à la classe NP.

Élements de correction :

On va écrire en Python une fonction qui renvoie vrai si et seulement si $S'$ est bien une couverture de $U$ de taille inférieure ou égale à $k$.

On propose une représentation de la sous-famille $S' \subseteq S$ par une simple liste $S'$ de $m = |S|$ booléens $[s'_0, \ldots, s'_{m-1}]$ tel que $s'_j = 1$ si et seulement si $S_j \in S'$ (c'est-à-dire l'ensemble $S_j$ est retenu pour la couverture $S'$).

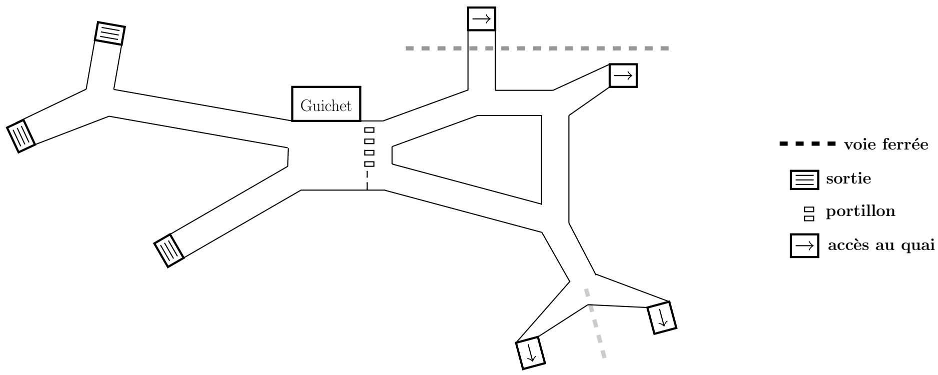
```
U = [0,1,2,3,4]
S = [[0,1],[2,3],[3,4],[0,1,2]]

# une liste SS de booleens de presence des elts de S
def SetCover_verif(U, S, SS, k):
    # verification de la taille de la sous-famille
    if sum(SS) > k:
        return False

    # verification de la couverture
    for i in range(len(U)):
        for j in range(len(S)):
            if SS[j] and U[i] in S[j]:
                break
        else:
            return False
    return True


SetCover_verif(U, S, [True,  True,  True, False], 3) #  >>> True
SetCover_verif(U, S, [True,  False, True, False], 2) #  >>> False
SetCover_verif(U, S, [False, False, True, True],  2) #  >>> True
```

On a une double boucle $|U| \times |S|$ avec à chaque fois une recherche en $\mathcal{O}(|U|)$ (`i in S[j]`), on obtient une complexité polynomiale en $O(|U|^2|S|)$. Donc on peut vérifier une solution en temps polynomial : le problème est dans NP.

# Des caméras dans le métro

Dans une station de métro, des caméras 360° peuvent être installées à chaque intersection de couloir pour surveiller la circulation des usagers. Pour des raisons évidentes de coût et d'entretien de matériel, l'entreprise qui gère la station souhaite installer le moins de caméras mais elle veut que tous les couloirs soient surveillés par au moins une caméra.

Nous considérons le plan de la station ci-dessous :

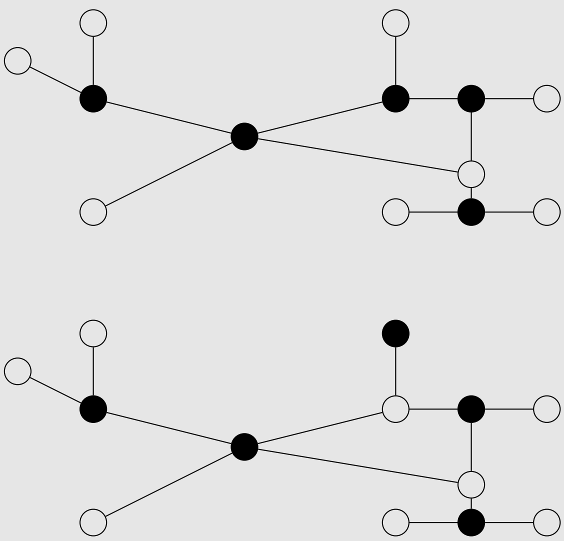



**Question 3**

Modélisez la station de métro à l'aide d'un graphe dont les nœuds représentent les intersections, sorties ou accès aux quais et les arêtes représentent les couloirs. Est-il possible de couvrir l'ensemble de la station avec 8 caméras ? Et avec seulement 5 caméras ?

Élements de correction :

Avec 8, c'est l'embarras du choix ! Mais il n y a que deux solutions avec 5 caméras :



**Question 4**

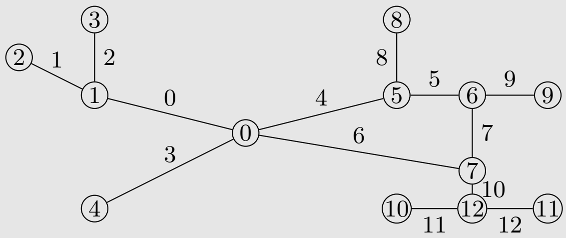
Il est naturel de modéliser le problème de pose de caméras dans la station de métro sous la forme d'une instance de Vertex Cover vu au premier exercice. On considère le graphe $G = (V, E)$ construit pour la station de métro et on se pose la question si avec $k$ sommets (où on positionnera les caméras) on peut couvrir toutes les arêtes (couloirs).

Modélisez maintenant le problème de pose de caméras dans la station de métro sous la forme d'une instance de Set Cover vu au deuxième exercice.

**Indication** : Numérotez tous les couloirs.

Élements de correction :

Les couloirs sont numérotés de la façon suivante :




On considère donc l'ensemble $U = \{0, \ldots, 12\}$ correspondant aux numéros d'arêtes (de couloirs) et la famille de sous ensembles : $S_0 = \{0, 3, 4, 6\}$, $S_1 = \{0, 1, 2\}$, $S_2 = \{1\}$, …, $S_6 = \{5, 7, 9\}$, …, correspondant à chaque sommet (intersection, sortie ou quai) et contenant les couloirs incidents.

la question est donc : existe-t-il une sous-famille $S' \subseteq S$ telle que $|S'| \leq k$ et $S'$ est une couverture de $U$ ?

**Question 5**

En généralisant le passage de Vertex Cover à Set Cover que vous avez réalisé pour cette instance, montrez que le problème de Set Cover est NP-difficile. Qu'en déduisez-vous ?

Élements de correction :

Pour montrer NP-difficile, il faut proposer une réduction polynomiale de Vertex Cover vers Set Cover.

Étant donné une instance de couverture par sommets $\mathcal{I}_{VC} = \langle G = (V, E), k \rangle$, nous allons construire une instance du problème Set Cover $\mathcal{I}_{SC} = (U, S = (S_i), k)$ telle que :

- $U = E$, les éléments sont les arêtes du graphe
- On numérote/confond les sommets $V$ de 1 à $n$ ($I = V = [1, n]$). Puis on définit $n$ sous-ensembles $S_i$ de $U$ tels que $S_i$ est l'ensemble des arêtes pour lesquelles le sommet $i$ est une extrémité, $S_i = \{(u, v) \in E | u = i \vee v = i\}$.

Cette transformation est clairement polynomiale en taille de l'instance $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

Il faut ensuite montrer que :

- $\Rightarrow$ Si $V' \subseteq V$ est une solution de couverture par sommets de taille au plus $k$ alors $C = \{S_i, i \in V'\}$ est une famille de taille inférieure ou égale à $k$. Et il s'agit bien d'une couverture par ensembles, car tout élément $e = (u, v) \in U = E$, étant une arête de $G$ est forcément couverte par au moins un sommet, soit $u$, soit $v$, soit les deux, par conséquent un/des sommet(s) couvrant(s) est/sont dans $V'$. Supposons que $u$ soit un sommet couvrant, on obtient par construction que $e \in S_u \in C$.
- $\Leftarrow$ Si $C = \{S_i, i \in I'\}$ est une couverture par ensembles de taille inférieure ou égale à $k$, l'ensemble des sommets $V' = I'$ dont les numéros indexent $S_i$ de $C$ est de taille au plus $k$. L'ensemble $V'$ est une couverture par sommets dans le graphe : si il existe une arête $(u, v) = e \in E = U$, on sait par construction de $C$ que $S_u \in C$ ou $S_v \in C$ car $e$ est couverte par $C$. $e$ est donc couverte dans le graphe soit par $u \in V'$, soit par $v \in V'$, soit par ces deux sommets.

Conclusion : Set Cover est NP et aussi NP-difficile, donc il est NP-complet.