CentraleSupélec

# Algorithmique et complexité

## TD 5/7 – Théorie de la complexité

Ce TD est l'occasion de s'exercer sur le cours de la complexité et de pratiquer la réduction polynomiale.

## Exercice 1 : Problème de couverture par les sommets (Vertex Cover)

Nous connaissons le problème de $k$-stable (*Independent Set*) vu en cours. Nous savons qu'il est NP-complet.

**Instance :**
— Un graphe non-orienté connexe $G = (V, E)$,
— $k \in \mathbb{N}^+$

**Question :** Existe-t-il un **stable** $S$ de $G$, c'est-à-dire un ensemble de sommets qui ne sont pas reliés entre eux par une arête, tel que $|S| \geq k$ ?

En revanche, nous ne connaissons pas encore le problème de $k$-couverture par sommets (*Vertex Cover*). Sa définition est la suivante :

**Instance :**
— Un graphe non-orienté connexe $G = (V, E)$,
— $k \in \mathbb{N}^+$.

**Question :** Existe-t-il un ensemble $V' \subseteq V$ de taille $|V'| \leq k$ tel que toute arête $\{u, v\} \in E$ a au moins une de ses extrémités dans $V'$ $(u \in V' \vee v \in V')$ ?

### Question 1

Démontrez que :

$$S \text{ est un stable} \iff V' = V - S \text{ est une couverture par sommets.}$$

### Question 2

Démontrez que le problème $k$-couverture par sommets est NP-complet.

## Exercice 2 : Problème de couverture par ensembles (Set Cover)

On dit qu'un élément $e$ est couvert par un ensemble $U$ si $e$ appartient $U$. Étant donnés un ensemble fini $U$ et une famille $S = \{S_i, i \in I\} \subset \mathscr{P}(U)$, le problème consiste à couvrir tous les éléments $U$ avec une sous-famille de $S$.

Par exemple, considérons $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $S = \{\underbrace{\{0,1\}}_{S_0}, \underbrace{\{2,3\}}_{S_1}, \underbrace{\{3,4\}}_{S_2}, \underbrace{\{0,1,2\}}_{S_3}\}$. On peut couvrir $U$ avec $\{S_0, S_1, S_2\}$ mais la couverture qui utilise le moins de sous-ensembles est $\{S_2, S_3\}$.

### Question 1

Formalisez le problème de décision correspondant.

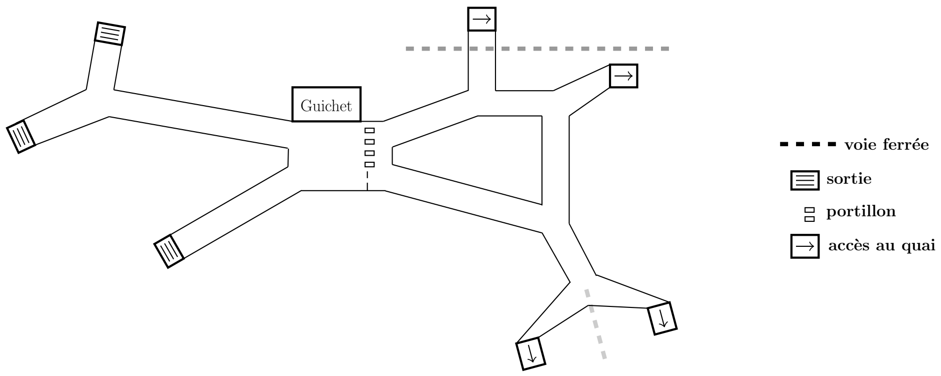
### Question 2

Montrer que le problème appartient à la classe NP.

## Des caméras dans le métro

Dans une station de métro, des caméras 360° peuvent être installées à chaque intersection de couloir pour surveiller la circulation des usagers. Pour des raisons évidentes de coût et d'entretien de matériel, l'entreprise qui gère la station souhaite installer le moins de caméras mais elle veut que tous les couloirs soient surveillés par au moins une caméra.

Nous considérons le plan de la station ci-dessous :




**Question 3**

Modélisez la station de métro à l'aide d'un graphe dont les nœuds représentent les intersections, sorties ou accès aux quais et les arêtes représentent les couloirs. Est-il possible de couvrir l'ensemble de la station avec 8 caméras ? Et avec seulement 5 caméras ?

**Question 4**

Il est naturel de modéliser le problème de pose de caméras dans la station de métro sous la forme d'une instance de Vertex Cover vu au premier exercice. On considère le graphe $G = (V, E)$ construit pour la station de métro et on se pose la question si avec $k$ sommets (où on positionnera les caméras) on peut couvrir toutes les arêtes (couloirs).

Modélisez maintenant le problème de pose de caméras dans la station de métro sous la forme d'une instance de Set Cover vu au deuxième exercice.

**Indication** : Numérotez tous les couloirs.

**Question 5**

En généralisant le passage de Vertex Cover à Set Cover que vous avez réalisé pour cette instance, montrez que le problème de Set Cover est NP-difficile. Qu'en déduisez-vous ?