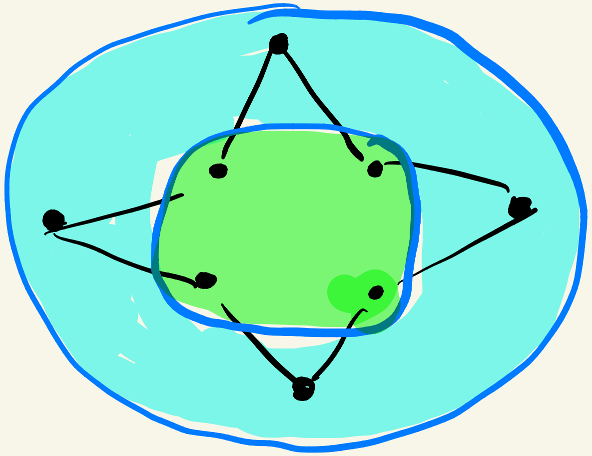
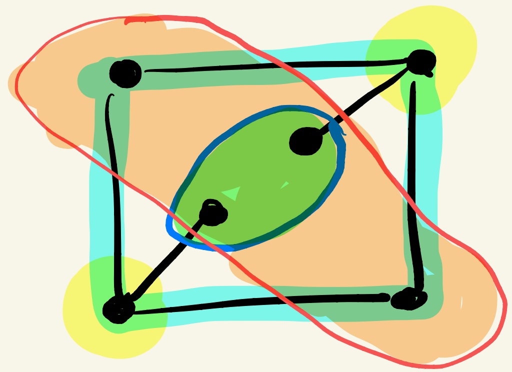
Exercice 1 : Vertex Cover





Q1 : $G = (V, E)$

S est un stable $\Longleftrightarrow$ $V' = V - S$ est une couverture

$\Rightarrow$ Si S est stable, pour toute arête $(u, v) \in E$, soit u, soit v n'est pas dans S et est donc dans $V - S$, donc $V - S$ est une couverture

$\Leftarrow$ Si $V - S$ est une couverture, pour toute arête $(u, v) \in E$, soit u, soit v est dans $V - S$, les deux ne peuvent donc pas être dans S. Aucune arête ne relie donc 2 sommets de S, S est un stable.

Q2 : Montrer que Vertex Cover est NP-complet

1°) Montrer qu'il est NP : donner un algo polynomial pour vérifier une solution

```
def check_VC(V, E, k, S)
    if len(S) > k :
        return False
```

$|S| \leq k$ $\qquad O(k)$

```
    for v in S :
        if not v in V :
            return False
```

$S \subseteq V$ $\qquad O(|V|^2)$

```
    for (u, v) in E
        if (not u in S) and (not v in S) :
            return False
    return True
```

Toute arête a une extrémité dans S
$O(|E| \cdot |V|)$

polynomial

2°) Montrer qu'il est NP-difficile en réduisant un problème dont on sait qu'il est NP-complet à ce problème

On cherche à réduire Independent Set à Vertex Cover

$(V,E), k \rightsquigarrow (V,E), |V|-k$

$$\begin{tikzcd}
k\text{-stable} \arrow[rr, squiggly, "\text{transfo}", "\text{polynomiale}"'] & & \text{Vertex Cover} \arrow[d, "\text{solution}"] \\
\text{solution} \arrow[u] & & S \arrow[ll, squiggly, "\text{transfo}", "\text{polynomiale}"']
\end{tikzcd}$$

$(V,E), k, V\setminus S \leftsquigarrow (V,E), |V|-k, S$

Soit $I_s = \langle G=(V,E), k \rangle$ une instance du problème k-stable

et $I_{vc} = \langle G=(V,E), |V|-k \rangle$ une instance de Vertex Cover

$\Rightarrow$ Si I_s est positive, $\exists S \subseteq V$, $|S| \geq k$, $\forall (u,v) \in S^2$, $(u,v) \notin E$

D'après la question 1, $V-S$ est une couverture, et $|V-S| = |V|-|S| \leq |V|-k$

donc I_{vc} est positive

$\Leftarrow$ Si I_{vc} est positive, $\exists S \subseteq V$, $|S| \leq |V|-k$, $\forall (u,v) \in E$, $u \in S$ ou $v \in S$

D'après la question 1, $V-S$ est un stable, et $|V-S| = |V|-|S| \geq |V|-|V|+k = k$

donc I_s est positive

Donc Vertex Cover est NP-difficile, et comme il est NP, il est NP-complet.

Exercice 2 : Couverture par ensembles (Set Cover)

$\mathcal{U} = \{'A', 'B', 'C', 'D', 'E'\}$ $\quad S = [\{'A', 'B'\}, \{'C', 'D'\}, \{'D', 'E'\}, \{'A', 'B', 'C'\}]$

$k = 2$

Sol 1 $= \{0, 1, 2\}$

Sol 2 $= \{0, 2\}$ $\quad$ Sol 3 $= \{2, 3\}$ $\quad$ Sol 4 $= \{1, 4, 2\}$

Q1 : Formaliser le problème de décision

Soit $\mathcal{U}$ un ensemble, $S \subset \mathcal{P}(\mathcal{U})$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{U}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Pb de décision : Existe-t-il $S' \subseteq S$ tel que

$$|S'| \leq k \quad \text{et} \quad \bigcup_{s \in S'} s = \mathcal{U}$$

Q2 : Montrer que Set Cover est NP

= donner un algorithme qui vérifie une solution en temps polynomial

```
def check_SC(U, S, k, Sol):
    if len(Sol) > k:
        return False
    for idx in Sol:
        if idx >= len(S):
            return False
    u = set()
    for i in Sol:
        u.update(S[i])
    if u != U:
        return False
    return True
```

au plus k sous-ensembles $\mathcal{O}(k)$

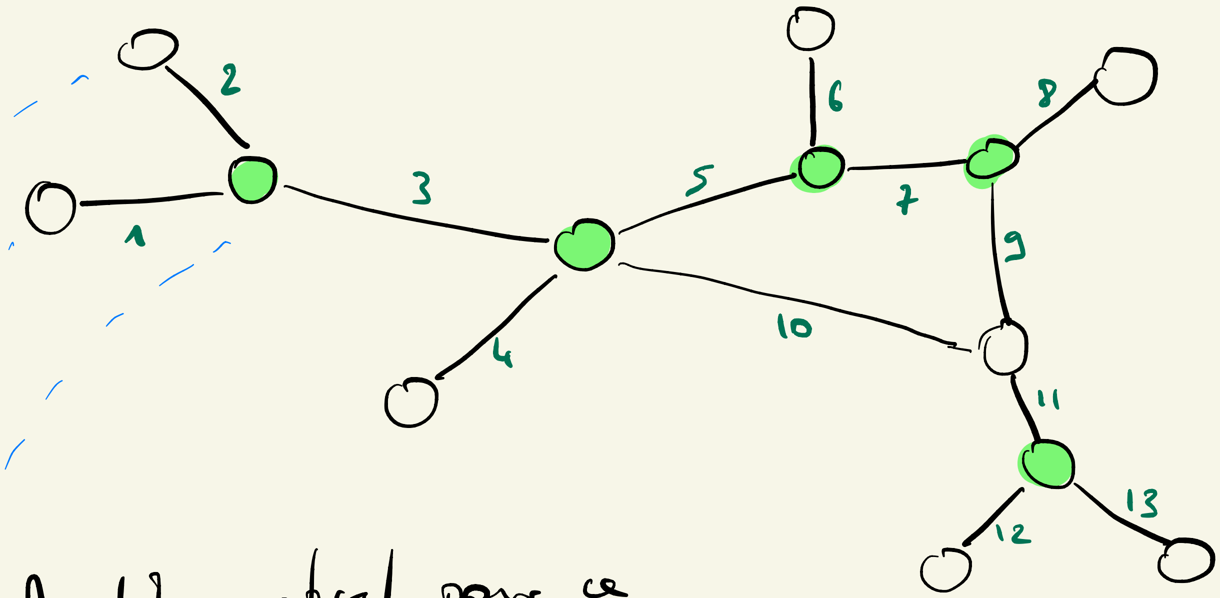
Sol $\subseteq$ S $\quad \mathcal{O}(k+S)$

Sol couvre $\mathcal{U}$ $\quad \mathcal{O}(k * |\mathcal{U}|)$ $\quad \mathcal{O}(|\mathcal{U}|)$

complexité polynomiale

Métro et caméras :

Q3



solution avec 5 caméras

Q4 :

Modèle naturel pour ce problème = Vertex Cover

Modélisation avec Set Cover ?

$k \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$S = \{ \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}, \{4\}, \{3,4,5,10\}, \{5,6,7\}, \{6\}, \{7,8,9\}, \{8\}, \{9,10,11\}, \{11,12,13\}, \{12\}, \{13\} \}$

Existe-t-il $S' \subseteq S$, $|S'| \leq k$, S' couvre $\mathcal{U}$

Q5 : Set Cover est NP-difficile

Réduire Vertex Cover à Set Cover

Soit $I_{vc} = \langle G = (V, E), k \rangle$ une instance de Vertex Cover

Soit $\nu : V \longrightarrow [1..n = |V|]$ une fonction injective (numérotation des sommets) $O(|V|)$

$\forall i \in [1..n]$, $S_i = \{ (u, v) \in E, \nu(u) = i \vee \nu(v) = i \}$ $O(|V| \times |E|)$

On construit l'instance $I_{sc} = \langle \mathcal{U} = E, S = (S_i)_{1 \leq i \leq n}, k \rangle$ de Set Cover

$\Rightarrow$ Si I_{vc} est positive, $V' \subseteq V$ est une couverture de taille $\leq k$

$C = \{ S_i : i \in \nu(V') \}$ est une famille de sous-ensembles de taille $\leq k$

qui est une couverture par ensembles car toute arête de E est touchée par V'

$\Leftarrow$ Si I_{sc} est positive, C est une couverture par ensemble de taille $\leq k$

L'ensemble V' des sommets de G dont l'indice correspond à un S_i dans C est une couverture par sommets de G

Donc Set Cover est NP-difficile. D'après la question 2, il est aussi NP, donc il est NP-complet.